Indice degli argomenti:

Le equazioni differenziali:

Una **equazione differenziale** di ordine n ha la forma:

$$F(x, y, y', ..., y^n) = 0.$$

E' quindi una equazione nella quale compaiono la x, la funzione y della stessa variabile e le sue derivate fino a quella dell'ordine ennesimo.Una funzione y(x) è **soluzione** dell'equazione se la soddisfa, cioè se

$$F(x, y(x), y'(x), ...y^n(x)) \equiv 0.$$

Le soluzioni prendono il nome di **integrali** .Questi ultimi possono essere di due tipi **integrale generale** e **integrale singolare.**

- Quello generale è costituito da una famiglia di curve del tipo

$$y = g(x, c_1, ..., c_n),$$

ciascuna delle quali, **integrale particolare**, si ottiene per arbitrari valori reali delle costanti. –

- L'integrale singolare invece non si ricava da quello generale. Per meglio chiarire quanto affermato consideriamo il seguente esempio. L'equazione differenziale del primo ordine

$$y = xy' + \frac{1}{2}y'^2$$

ha la famiglia di curve (in questo caso rette)

$$y = cx + \frac{1}{2}c^2$$

come integrale generale e la funzione

$$y = -\frac{1}{2}x^2$$

per integrale singolare.
Ciò si può facilmente verificare determinando la derivata prima e sostituendo.
Esistono vari tipi di equazioni differenziali. Una prima classificazione può essere fatta in base all'ordine.
Possono essere del primo, del secondo, del terzo ordine ecc. Quelle che verranno esaminate e delle quali saranno svolti degli esempi sono :

equazioni a variabili separabili;
equazioni lineari;
equazioni omogenee;
equazione di Bernoulli
equazioni del 2° ordine

Equazioni a variabili separabili

Una equazione si dice a variabili separabili se può essere ricondotta alla forma

$$y'=f(x)g(y) \quad (1) \qquad \text{(con } g(y) \text{ diverso da 0)}$$

Per la soluzione si esprime y' come $\frac{dy}{dx}$ e si effettuano i calcoli che seguono:

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$$

moltiplicando ambo i membri per dx si ottiene:

$$dy=f(x)g(y)dx$$

dividendoli per g(y) si ha:

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$$

e integrando i due membri si perviene a:

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+c$$

Quest'ultimo è l'integrale generale dell'equazione (1); c è la costante arbitraria che esce dall'integrazione.

Esempio 1.

$$y'=-xy$$

$$\frac{dy}{dx}=-xy$$

$$dy=-xydx$$

$$\frac{dy}{y}=-xdx$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int xdx+c$$

$$\ln|y|=-\frac{x^2}{2}+c$$

Questa soluzione se si tiene conto delle proprietà delle potenze si può scrivere

$$y=e^{-\frac{x^2}{2}}e^c$$

cioè

$$y=ke^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{(integrale generale)}$$

Equazioni lineari del primo ordine

Una equazione **lineare completa** del primo ordine è del tipo

$$y' + a y = b$$

Dove $y' = dy/dx$ e i valori a e b sono funzioni in x; quindi per essere corretti e pignoli la scrittura giusta sarebbe:

$$y' + g(x) y = f(x)$$

un'equazione **lineare omogenea** si presenta così:

$$y' + a y = 0$$

la soluzione di una lineare omogenea è:

$$y = k e^{-\int a\,dx}$$

Da notare che a, essendo funzione in x si deriva in dx

Mentre di quella della completa è:

$$y = k e^{-\int a(x)dx} + e^{-\int a(x)dx} \cdot \int b\, e^{\int a(x)dx}\, d(x)$$

anche in questo caso si deriva in dx per la stessa considerazione fatta sopra

Esempio: 1.7 (in questo caso si hanno anche i valori finali)

$\frac{dx}{dt} - 2x = 3$ con $x(t_0) = x_0$ $x_{(0)} = 2$

ovviamente dx/dt sappiamo essere $\dot{x}$ quindi: $\dot{x} - 2x = 3$

a questo punto si applica la formula ottenendo:

$$x = k \cdot e^{\int 2dt} + e^{\int 2dt} \cdot \int 3 \cdot e^{\int -2dt}\, dt$$

facciamo un paio di passaggi ottenendo:

$$x = k \cdot e^{2t} + e^{2t} \cdot 3 \int e^{-2t}\, dt$$

$$x = k \cdot e^{2t} - \frac{3}{2} e^{2t} \cdot e^{-2t}$$

$$x = k \cdot e^{2t} - \frac{3}{2} \quad (1)$$

a questo punto, sapendo che per t=0 ottengo x=2 (dichiarato all'inizio dell'esercizio) posso sostituire ottenendo:

$$2 = k - \frac{3}{2}$$

k=7/2

Avendo trovato anche il valore di k lo sostituisco all'equazione (1) ottenendo il risultato:

$$x = \frac{7}{2} \cdot e^{2t} - \frac{3}{2}$$

Esempio 1.8:

$$\frac{dx}{dt} - x = t + 2t^2$$

svolgiamo l'esercizio:

$$\dot{x} - x = t + 2t^2$$

$$x = k \cdot \mathrm{e}^{\int dt} + \mathrm{e}^{\int dt} \cdot \int (t + t^2) e^{\int dt} dt$$

$$x = k \cdot e^t + e^t \cdot \int (t + 2t^2) \cdot e^{-t} dt$$

$$x = k \cdot e^t + e^t \cdot [\int t \cdot e^{-t} dt + \int 2t^2 \cdot e^{-t} dt]$$

fatte le dovute semplificazioni si ottiene come risultato:

$$x = k\, \mathrm{e}^t - 2\mathrm{t}^2 - 5\mathrm{t} - 5$$

Equazioni omogenee

Una equazione si dice omogenea se può essere espressa nella forma:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1)$$

Per risolverla si pone:

$$\frac{y}{x} = z$$

da cui

$$y = xz.$$

Si calcola la derivata prima in x; poiché z è una funzione anche in x la sua derivata sarà regolata dalla regolina D[f(x)*g(x)]=f'(x)*g(x)+f(x)*g'(x); considerato ciò otteniamo:

$$y' = D[zx]$$

$$y' = z'x + z$$

e sostituendo nell'equazione (1) si ottiene

$$z + xz' = f(z)$$

Si è così trasformato la (1) in una equazione a variabili separabili

Esempio

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy} \quad (2)$$

Pongo $\frac{y}{x} = z$ di conseguenza $y = xz$

$$y' = z + xz'$$

Sostituendo nella (2) i valori di y' e y si ricava

$$z + xz' = \frac{x^2 + x^2 z^2}{x^2 z}$$

$$z + xz' = \frac{1 + z^2}{z}$$

$$z + xz' = \frac{1}{z} + z$$

$$xz' = \frac{1}{z}$$

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{1}{z}$$

$$zdz = \frac{1}{x}dx$$

Integrando ambo i membri ed eseguendo i calcoli si ottiene l'integrale generale

$$\int z dz = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{z^2}{2} = \ln|x| + c$$

$$z^2 = 2\ln|x| + 2c$$

$$z = \pm\sqrt{2\ln|x| + 2c}$$

$$z = \pm\sqrt{2\ln|x| + k}$$

$$y = \pm x\sqrt{2\ln|x| + k}$$

Nelle ultime due si è posto 2c=k.

Equazione di Bernoulli

L'equazione di Bernoulli si presenta nella forma:

$$y' + f(x)y = g(x)y^m \qquad con\, m \neq 0 \text{ e } m \neq 1$$

Questa equazione si risolve introducendo una variabile "z" grazie alla quale portiamo l'equazione in una forma risolvibile:

$$\frac{y'}{y^m} + \frac{f(x)y}{y^m} = \frac{g(x)y^m}{y^m}$$

$$\frac{y'}{y^m} + f(x)y^{1-m} = g(x)$$

$$y'y^{-m} + f(x)y^{1-m} = g(x) \qquad \text{<-(1)}$$

Si pone $z = y^{(1-m)}$, da cui $\dot{z} = (1-m)\, y^{-m}\, \dot{y}$;facendo un paio di conti ricaviamo $y = z^{\frac{1}{1-m}}$ e $\dot{y} = \frac{\dot{z} \cdot y^{-m}}{(1-m)\, y^{-m}}$ che a questo punto sostituisco nell'equazione **(1)** ottenendo

$$\frac{\dot{z}}{(1-m)} + f(x) z = g(x)$$

A questo punto quella ottenuta è una comune equazione lineare, che so facilmente risolvere una volta trovata la *z* ricavo la *y*.

Esempio

$$\dot{y} + xy = xy^3 \;\; \text{->} \;\; \frac{\dot{y}}{y^3} + \frac{x}{y^2} = x \;\; \text{->} \;\; \frac{\dot{z}}{2} + xz = x$$

A questo punto risolvo l'equazione lineare ottenuta:

$$z = k\, e^{\int 2x\, dx} + e^{\int 2x\, dx} \cdot \int (-2x)\, e^{\int -2x\, dx}\, dx$$

$$z = k\, e^{x^2} + e^{x^2} \cdot \int (-2x) e^{x^2}\, dx$$

$$z = k\, e^{x^2} + e^{x^2} \cdot e^{-x^2}$$

$$z = k\, e^{x^2} + 1$$

ora ricaviamo la y:

ricordo che $y^{(1-m)} = z$ quindi -> $y^{-2} = k\, e^{x^2} + 1$

in definitiva la soluzione è:

$$y = (k\, e^{x^2} + 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{k\, e^{x^2} + 1}}$$

Equazioni del II ordine a coefficienti costanti

Sono equazioni in cui la y'' deve comparire esplicitamente; mentre la x, la y e la y' possono anche non figurare; andiamo a vedere come si risolve questo tipo di equazioni:

Equazioni lineari omogenee del 2° ordine:

sono del tipo: $$ay''+by'+cy=0$$

per risolverle si introduce un'equazione ausiliaria nel secondo ordine nell'incognita n, ma con gli stessi valori di a,b e c della nostra omogenea:

$$an^2+bn+c=0$$

a questo punto, trovati i valori n_1 e n_2 trovo la y in questo modo:

1) se $\Delta>0$ allora $y=k_1\cdot e^{n_1\cdot x}+k_2\cdot e^{n_2\cdot x}$
2) se $\Delta=0$ allora $y=k_1\cdot e^{n_1\cdot x}+k_2\cdot 2x\cdot e^{n_2\cdot x}$ ma $n_1=n_2$
3) se $\Delta<0$ allora $y=k_1\cdot e^{z\cdot x}\cdot\cos(wx)+k_2\cdot e^{z\cdot x}\cdot sen(wx)$ dove *$n_{1,2}$ è nella forma* $z\pm iw$
   ricordo che $z=b$ e $\Delta=\sqrt{|b^2-4ac|}$

vediamo il seguente esempio: $\ddot{y}-4\dot{y}+13y=0$

introduciamo l'equazione ausiliaria: $n^2-4n+13=0$

in questo caso $\Delta<0$ quindi $n_{1,2}=\dfrac{(4\pm\sqrt{16-52})}{2}=2\pm3i$

applicando la formula otteniamo:

$$y=k_1\cdot e^{2x}\cdot\cos(3x)+k_2\cdot e^{2x}\cdot sen(3x)$$

Equazioni lineari NON omogenee del 2° ordine:

sono del tipo: $$a\ddot{y}+b\dot{y}+cy=d(x)$$

per risolverle opero come segue:

1 innanzitutto annullo d(x) e risolvo come se avessi un'equazione omogenea;

2 a questo punto trovo la “soluzione particolare”, ovvero la soluzione data dal termine f(x); è dimostrato infatti che la soluzione dell'equazione è la somma delle due soluzioni

vediamo allora come trovare la soluzione particolare “Y”:

- se f(x) è del tipo e^{nx} Y sarà $k\cdot e^{nx}$
  esempio: f(x) = $3e^{-x}$ -> Y= ke^{-x}
  Eccezione: se *n* è una soluzione dell'equazione associata Y= $n\cdot k\cdot e^{nx}$
  se invece è radice doppia Y= $n^2 k\cdot e^{nx}$
- se f(x) è del tipo $sen(x)$ Y sarà $k_1\cdot sen(x)+k_2\cdot\cos(x)$
  esempio: f(x) = $3sen(2x)$ -> Y= $k_1\cdot sen(2x)+k_2\cdot\cos(2x)$

- se f(x) è un polinomio di grado *m,* Y si trova come segue:
  se di grado 0 Y = C
  se di grado 1 Y = $B\cdot x+C$
  se di grado 2 Y = $A\cdot x^2+B\cdot x+C$
  esempio 1: $\ddot{x}-\dot{x}-x=t$ -> $f(x)=t$ (primo grado) -> Y = $Bt+C$
  esempio 2: $\ddot{x}-5\mathrm{dot}\,x-9\mathrm{x}=t^2$ -> $f(x)=t^2$ (secondo grado) -> Y = At^2+Bt+C
  notare che $\ddot{x}-5\mathrm{dot}\,x-9\mathrm{x}=t^2+t$ -> $f(x)=t^2+t$ -> Y = At^2+Bt+C
  eccezione: in funzioni come $\ddot{y}+2\dot{y}=3$ (manca *y*) la soluzione particolare è del tipo Y= $B\cdot x+C$

3 Trovata la Y ne faccio la derivata prima e seconda;
quindi, una volta calcolati Y, Y' e Y'' vado a sostituirne i valori nell'equazione non omogenea iniziale; rispettivamente a y'' sostituisco Y'', a y' -> Y', e a y -> Y
e calcolo i valori di C, B, A; ottenendo l'integrale particolare

facciamo un esempio chiaritore:

$$y''-3y'+2y = x^2$$
$$y''-3y'+2y = 0$$
$$\alpha^2-3\alpha+2=0$$
$$\alpha=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}$$
$$\alpha_1=1 \qquad \alpha_2=2$$
$$y=c_1e^x+c_2e^{2x}$$

ora risolta la omogenea associata calcolo la soluzione particolare:

$$Y=ax^2+bx+c$$
$$Y'=2ax+b$$
$$Y''=2a$$

A questo punto sostituisco nell'equazione iniziale ottenendo:

$$2a-3(2ax+b)+2(ax^2+bx+c)=x^2$$

Eseguendo i calcoli si determina:

$$(2a-1)x^2+(-6a+2b)x+2a-3b+2c=0$$

Per l' identità dei polinomi si può srivere il sistema

$$\begin{cases} 2a=1 \\ -6a+2b=0 \\ 2a-3b+2c=0 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=\frac{3}{2} \\ c=\frac{7}{4} \end{cases}$$

Pertanto l'integrale particolare della completa è:

$$Y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$$

4 A questo punto mi basta sommare le soluzioni; quindi: $y^* = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$

Vediamo ora altre forme caratteristiche delle equazioni differenziali del 2° ordine

Equazioni nella forma ***y''=f(x)*** (mancano i termini y' e y)
si risolvono integrando 2 volte la f(x)

1. $\dot{y} = \int f(x)\,dx = S + C_1$
2. $y = \int \dot{y}\,dx = \int [S + C_1]\,dx = y + C_1 x + C_2$

Equazioni nella forma ***y''=f(x,y')*** (non compare l'incognita y)

1. pongo $z(x)=y'$ e, di conseguenza, $z'(x)=y''$
2. sostituisco nella mia equazione di partenza ottenendone una di primo ordine
3. risolvo l'equazione ottenuta e risostituisco y' alla z calcolata ottenendo una nuova equazione di primo ordine
4. risolvo l'equazione nella y trovando la soluzione.

Esempio:

$\ddot{y} = \frac{(\dot{y}-2)}{x}$ -> sostituisco -> $\dot{z} = \frac{(z-2)}{x}$

l'equazione ottenuta è del tipo a variabili separabili:

$$\frac{\dot{z}}{(z-2)} = \frac{1}{x}$$
$$\frac{dz}{(z-2)} = \frac{dx}{x}$$
$$\int \left(\frac{dz}{(z-2)}\right) = \int \left(\frac{1}{x}\right) dx$$
$$\ln|z-2| = \ln|x| + C_1$$
$$z-2 = xC_1$$
$$z = xC_1 + 2$$

a questo punto sostituisco la y:

$$y' = xC_1 + 2$$
$$\int dy = \int (xC_1 + 2)\,dx$$
$$y = 2x + \frac{C_1}{2} \cdot x^2 + C_2$$

Equazioni nella forma ***y''=f(y,y')*** (non compare la variabile indipendente)

1. pongo $y'=z$ e di conseguenza $y''=z'z$
2. sostituisco nella mia equazione di partenza ottenendone una di primo ordine
3. risolvo l'equazione ottenuta e risostituisco y' alla z calcolata ottenendo una nuova equazione di primo ordine
4. risolvo l'equazione nella y trovando la soluzione.

Esempio:

$\ddot{y}\cdot(2y+3)=\dot{y}^2$

pongo: y'=z -> *y''=z'z*

$$\dot{z}\,z(2y+3)=z^2$$

$$\frac{(\dot{z}\,z)}{z^2}=\frac{1}{(2y+3)}$$

$$\int[\frac{(\dot{z}\,\cancel{z})}{z^{\cancel{2}}}]dz=\int[\frac{1}{(2y+3)}]dy$$

$$\ln|z|=\ln|2y+3|+C_1$$

$$z=(2y+3)C_1$$

Risostituisco e ottengo:

$$\dot{y}=(2y+3)C_1$$

$$\int[\frac{\dot{y}}{(2y+3)}]dy=\int ????$$